附录　典型案例评析

用频率估计概率（第 2 课时）

设计：山东省青岛市第二实验初级中学　葛鸿芬
评析：山东省青岛市市北区教育研究发展中心　陈　怡

一、学情分析

学生的知识技能基础：在七年级学生已经初步认识了频率与概率之间的关系，并掌握了求简单的随机事件概率的一类方法. 在本章第 1 节，学生又进一步学习了求涉及两步试验随机事件概率的方法——画树状图和列表，学生对频率与概率的理解随着数学活动经验的不断积累已逐步得到发展，完全具备进一步学习较为复杂随机事件的能力和知识基础.

学生的活动经验基础：在之前的学习中，学生已经经历了一些统计活动，用频率估计简单事件的概率，在这一过程中获得了本节课所需要的一些数学活动经验. 同时，他们也积累了一定的合作学习经验，具备了一定的合作交流能力.

二、任务分析

本节课是让学生经历试验、统计等活动过程，进一步丰富活动经验，并深刻体会统计与概率的联系. 本节课的具体学习任务：估计 50 人中有 2 个人生日相同的概率，用试验频率来估计复杂事件发生的概率.

三、教学目标

1. 经历试验、统计等活动过程，积累活动经验，体会概率与统计的关系，进一步发展合作交流的意识和能力.

2. 进一步认识频率与概率的关系，加深对概率的理解；能用试验的方法估计一些随机事件发生的概率.

3. 通过有趣的生日问题的试验、统计，提高学习兴趣，形成严谨的科学态度.

四、教学重、难点

本节课的重点是用试验的方法估计一些复杂随机事件发生的概率.

本节课的难点是试验方案的设计.

五、教学过程

【第一环节】课前准备，收集数据（提前布置）

1. 内容

（1）以小组为单位，每组调查 50 个不同人的生日，由组长分工.

除了调查自己周围的人，每个小组可以根据自己组内同学的兴趣爱好，调查部分不同领域、不同年龄段、不同国籍的名人. 例如，第一组的 50 个数据中，有 10 个来自体育名人，可命名为“体育组”；第二组的 50 个数据中，有 10 个来自艺术家，命名为“艺术组”；第三组的 50 个数据中，有 8 个来自政治名人，命名为“政治名人组”；如此等等.

（2）每组组长负责汇总、记录本组数据，数学课代表以方便提取使用为原则对全班的数据进行统计.

（3）以小组为单位，课前初步讨论对“50 个人中，就很可能有 2 个人的生日相同”这一说法的看法.

2. 目的

收集数据，为本节课的学习提供素材. 让学生调查不同领域、不同年龄段、不同国籍的名人的生日，既可以培养学生良好的价值观，同时在时空穿越中，将自己的生日与名人的比较，又可以增加本课的趣味性，必能极大地调动全体学生的参与热情. 对于问题（2）（3），可以启发学生思考：怎样做可以使数据的统计更有效率？统计结果更便于使用？以此突出课堂教学的重点，切实提高课堂效率.

3. 预期

在课堂中运用源于学生实际调查的真实数据展开教学，必将极大地激发学生学习数学的兴趣，调动他们学习的积极性与主动性. 学生课外收集的数据有可能来自相同的人，因此调查时应要求写上被调查人的姓名，防止重复. 教师还应关注学生调查数据来源的广泛性，如学生会调查周围的亲友，或者在马路、商场等不同场所调查，或者运用网络技术，也不排除有的学生会自己随意写一个生日. 课上请组长展示数据的同时，要求说明数据的来源情况，此时教师应给予正面具体评价，如“你的数据来源很丰富”“你能充分利用信息技术”，甚至“你随意写的一个生日说明你意识到生日的随机性”等.

【第二环节】提出问题，认知冲突

1. 内容

教师提出问题串：

（1）400 个人中，一定有生日相同（可以不同年）的人吗？

（2）300个人中，一定有生日相同（可以不同年）的人吗？

（3）有人说：“50 个人中，就很可能有2个人的生日相同.”你同意这种说法吗？

2. 目的

生日问题紧紧贴近学生生活，迅速吸引学生的注意力，极大地调动了学生的积极性和参与意识. 问题（3）的提出与学生的直觉形成强烈认知冲突，激发学生探究的欲望.

3. 预期

对于问题（1），学生会肯定地回答“一定存在”. 能力比较强的学生会用“抽屉原理”加以解释. 例如，有的学生会给出如下的解释：“一年最多 366 天，400 个人中一定会出现至少 2 个人出生在同一天，相当于 400 个物品放到 366 个抽屉里，一定至少有 2 个物品放在同一抽屉里. 抽屉原理：把 m 个物品任意放进 n 个空抽屉里（$m>n$），那么一定有一个抽

屉中放进了至少 2 个物品.”对于能用“抽屉原理”解释的学生，教师应给予充分的表扬.

对于问题（2），学生会给出“不一定”的答案，此时学生凭直觉会断定可能性较大.

对于问题（3），学生凭直觉会认为“不太可能”，与问题中的观点形成强烈的反差. 由于学生不理解这一事件的意义，因此会出现两种思维的偏差：① 如果有 2 个人在 1 月 1 日出生，3 个人在 1 月 2 日出生，那么有的学生会认为事件的概率为 $\frac{5}{366}$ 或者 $\frac{5}{50}$；② 还有学生会认为事件的概率为 $\frac{50}{366}$. 对于观点 ①，教师应明确“50 个人中，有 2 个人的生日相同”这一事件，重点在“生日是否相同”，而不在“有多少人生日相同”；至于持观点 ② 的学生，其潜意识中误认为所有可能的结果是 366 种，而生日相同的结果是 50 种. 基于课前组内的初步交流与讨论，此时教师不要急于否定学生中的错误观点，而应给予其他学生表达自己看法的机会，让学生在质疑与辩论中加深对这一事件的理解. 如果没有学生质疑，教师应追问：“这一问题中，每个人的生日有多少种等可能的结果？50 个人的生日共有多少种等可能结果？是 366 种吗？”通过教师的点拨与引导，纠正学生对这一事件理解上的偏差，初步感悟这一事件的复杂性，在学生困顿与迷茫中，顺势引出下一环节.

【第三环节】交流碰撞，明确方法

1. 内容

“50 个人中，有2 个人的生日相同”的可能性大吗？怎样说明你的观点是否正确？与同伴交流.

2. 目的

通过前面环节的铺垫，在此以开放性的问题促进学生的进一步思考，在交流与碰撞中，水到渠成地使学生感悟到“用试验的方法估计这一复杂随机事件的概率”的必要性.

3. 预期

学生在交流中，会回顾所学过的求概率的方法，出现两种可能情况：（1）有的学生会试图用画树状图或者列表的方式求概率的理论值，但很快便感受到其复杂性而终止尝试.（2）还有的学生会先从身边寻找证据：自己家人中是否有生日相同的？自己现在所在班级中是否有生日相同的？自己小学所在班级中是否有生日相同的？教师应给予学生充足的时间进行交流和展示. 对于这两种不同的思路，教师都应给予积极的引导性评价. 例如，“两类同学都能积极思考，联系以前的知识，第一类同学独具慧眼发现了这一事件的本质是等可能事件，第二类同学认识到概率与统计之间的关系”. 在此基础上，教师还应继续追问：通过对家人和小学同学的调查，你能由此确定“50个人中有2个人生日相同”的概率吗？如何得到较为准确的结论？在教师的引导下，学生顺理成章地想到需要通过大量重复试验，用频率来估计“50 个人中有 2 个人生日相同”的概率，顺利进入下一环节.

【第四环节】合作交流，设计方案

1. 内容

请你尝试设计试验方案，估计“50 个人中有 2 个人生日相同”的概率，并与同伴交流.

2. 目的

通过设计方案，将上一环节的讨论进一步深化，加深学生对用试验频率估计“50 个人中有2个人生日相同”的概率的理解.

3. 预期

在这一环节中，教师要鼓励学生进行设计和表达，在交流与讨论中完善试验方案. 基于课前学生的调查、讨论和交流，以及前几个环节的学习，学生已经理解了这一事件的本质，试验方案也已形成，表现的时刻终于到来，因此学生积极性会很高. 教师要引导学生反思每种方案的注意事项及其优劣，加深学生对设计方案的理解，突破难点.

学生可能提出以下设计方案（学生展示自己设计的方案时，当即操作一组试验，既可以发现问题，又可以感受方法的优劣）：

方案一：在班级课堂里展开现场调查，提问小学不在同一个班级的同学，看他小学所在的班级中是否有生日相同的同学，他家里亲友是否有生日相同的人.（优点：便于操作；缺点：有的学生不知道小学同学的生日）

方案二：调查全校各个班级（或者历届各个班级）是否有生日相同的情况，并记录.

（教师应在课前准备全校各个班级及历届各个班级的数据，提高课堂效率，加大试验数据，提高准确度）

方案三：从50 个同学手里随机抽取一个调查数据，组成50 个数据.

方案四：全班分成10 个小组，把每个小组的调查数据放在一起，打乱次序，随机抽取5 个，然后10 个小组的结果放在一起组成50 个数据.

方案五：将每个同学调查的生日随机排列成一数阵，然后按某一规则从中选取50 个数据进行试验（如排成25×20的数阵，从某行某列开始，自左而右、自上而下，选出50个数）.

方案六：把全班每个同学所调查的数据写在纸条上，放在箱子里随机抽取.

方案七：将每个同学调查的10 个生日分别写在10 张纸条上，放在箱子里随机抽取.

方案八：把一年366 天用366 个数字代替，写在366 张纸条上，放在箱子里随机抽取.

方案九：每个同学随意写一个生日.

方案三至方案七均是充分利用学生的调查数据，学生的理解随着不同方案设计的展示而逐渐加深，如用频率估计概率需要在大量试验的情况下，所以需要较多数据. 展示方案二时，学生可能会认为被选过的同学手中的数据在下一组试验中不能再被选用，这样数据就会很有限. 此时，教师要引导学生充分表达自己的见解. 不排除随着各种不同方案的展示与交流，学生也可能会想到方案八和方案九. 如果有学生提出了这两种方案，那么教师应给予导向性评价，如“思维很深刻，发现了这一事件的本质，操作简单”等；如果没有学生提出这两种方案，那么教师可以在下一环节继续引导学生思考.

【第五环节】分组合作，统计数据

1. 内容

（1）每个组长到讲台上展示自己小组调查的数据，记录其中有无2 个人的生日相同，有则记为“1”，无则记为“0”；每统计50 个被调查人的生日为一次试验，重复多次试验.

（2）教师展示提前统计的本校历届各个班级的学生生日的信息.

（3）统计试验的总次数 m，及记为“1”的次数 n，据此估计“50 个人中有 2 个人生日相同”的概率.

（4）你还有其他比较简便的方法来估计“50 个人中有 2 个人生日相同”的概率吗?

2. 目的

给小组搭建展示的平台，展现学生不同的记录方式，在对比中提升统计的水平和小组合作的水平. 通过具体收集数据、试验、统计结果等过程，丰富学生的数学活动经验，使学生对用频率估计概率这一方法有更直观的感知，加深对概率的理解. 同时使学生感受到生日相同的概率比想象的要大得多. 问题（4）旨在引导学生进一步思考更加简便的操作方法，渗透模拟试验的想法.

3. 预期

有了前面的铺垫，本环节的教学相对比较顺利，学生的参与热情高涨. 对于小组展示的不同记录数据的方式，学生会自觉地在对比中判断优劣，潜移默化地提升自己的统计水平. 同时，教师围绕教学重点针对不同情况启发学生共同想办法提高效率. 比如，为了节约时间，生日表示方式简化成四位数（如“0217”），将相同月份写在同一行或同一列；课代表可以把数据提前统计在 EXCEL 表中. 教师应适时评价学生的参与程度、与同学合作交流的情况、对概率的理解是否全面等，并对活动过程中学生的思维方式进行及时指导.

教师提前统计本校历届各个班级学生的生日信息，通过真实数据，使学生有更加直观的感知，同时也可以增加试验的次数，提高课堂效率. 随着试验次数的增加，学生强烈感受到试验结果与原来想象的巨大反差. 教师也可将试验数据输入 EXCEL 表格，转化成频率折线统计图，展示频率的大小随试验次数的增加而变化的情况，发现频率的稳定性，同时估算出概率.

对于问题（4），有了前面的层层铺垫，学生可能会想到类似上一环节中的方案八或者方案九. 教师应充分肯定学生的模型意识，把实际调查转化成了模拟试验. 对这个问题的思考也为下一环节从生活中发现问题进行了方法上的铺垫.

【第六环节】方法提炼，变式探究

1. 内容

（1）同学们设计的试验方案可以分为几类？为什么？谈谈你的看法.

（2）在之前的概率学习中，用过类似的方法吗?

（3）请你设计一个方案，估计 6 个人中有 2 个人星座相同的概率.

2. 目的

这一环节起到承上启下的作用. 问题（1）和问题（2）逐步引导学生感悟模型思想. 问题（3）将生日问题替换成星座问题，既可以巩固对方案设计的认识和理解，又能深刻体会方法的迁移，为下一环节做好铺垫.

3. 预期

对于问题（1），学生能较为顺利地将设计的方案分成两大类：一类是真实调查，一类

是模拟试验.

对于问题（2），学生应能联想到掷骰子、转转盘、摸球、摸纸牌等游戏，认识这些游戏的共同之处.

对于问题（3），教师应鼓励学生勇于表达，如有不完善之处，不应急于告知答案，而应请其他同学补充完善.

【第七环节】方法迁移，类比应用

1. 内容

（1）一个口袋中有 3 个红球、7 个白球，这些球除颜色外都相同. 从口袋中随机摸出一个球，这个球是红球的概率是多少？

（2）将问题（1）口袋中的球搅拌均匀，从中随机摸出一个球，记下颜色并放回. 不断重复这一过程，共摸了 100 次球，大约会有多少次是红球？多少次是白球？

（3）老师有一个不透明的盒子，盒中有红球、白球共 10 个，这些球除颜色外都相同. 如果不将球倒出来数，如何估计其中红球和白球的比例呢？请你帮助老师设计一个方案.

（4）你还能提出并解决哪些与问题（3）类似的问题？与同伴交流.

2. 目的

这一环节将复杂的生日问题换成一个简单的摸球试验，呈现 4 个不同梯度的问题，逐层递进. 问题（1）和问题（2）引导学生再次体会概率与频率之间的关系，进一步感受统计推断的合理性. 问题（3）通过“摸球试验”与“生日相同的试验”类比，体会两者之间方法的联系，应用频率与概率的关系求解比例或者数量问题，培养学生知识和方法的迁移能力. 问题（4）引导学生将此类方法进行延伸，进一步发展学生发现问题、提出问题的意识和能力，以及用统计概率解决问题的能力.

3. 预期

对于问题（1）和问题（2），学生能顺利得出正确结论，从而为问题（3）的解决扫清障碍，奠定基础. 如有时间，问题（2）应让学生当堂试验验证，在试验中进一步体验统计推断的合理性. 对于问题（3），学生会用字母表示比例，同时受前面环节的影响，学生会自然而然地想到用统计的方法估计红球和白球的比例. 对于问题（4），学生一般能想到可以估计数量. 比如，一个口袋中有 8 个红球和若干个白球，如果不将球倒出来数，那么你能估计出其中的白球数吗？又如，如果口袋中只有若干个白球，没有其他颜色的球，而且不将球倒出来数，那么你如何估计出其中的白球数？……如果学生缺乏思路，教师可适当进行点拨.

【第八环节】归纳小结，思维升华

1. 内容

师生共同总结本节内容：

（1）请从知识、方法角度谈谈你的收获.

（2）你的困惑是什么？你还想继续研究什么问题？

（3）哪位同学的表现值得你学习或让你惊喜？

2. 目的

帮助学生养成归纳总结的良好习惯，培养反思意识，在归纳总结中加深对知识和方法的理解与感悟. 问题（2）给学有余力的学生搭建平台，激发学生继续思考，大胆探索. 问题（3）鼓励学生善于学习他人的优点，勇于表达自己的观点.

3. 预期

学生从知识、方法、学习品质等不同角度畅谈自己的收获和感想.

对于问题（1），学生会总结如下：① 本节课经历了猜想、调查、试验、统计结果、合作交流的过程，知道了用大量重复试验的频率来估计一些复杂随机事件的概率. ② 当试验次数较多时，试验频率稳定于理论概率. ③ 知道了“直觉并不可靠”，本节“50 人中有 2 人生日相同”的概率竟高达 0.97，这有违我们的“常识”. ④ 生活中有很多看似巧合实则平凡的现象，如果我们用科学的方法研究一下其概率，就会“透过现象看到本质”.

对于问题（2），部分学有余力的学生会继续研究模拟试验，或者“假如不知道总量，如何用试验的方法估计总量？”. 对于学生的表现，教师应从不同角度予以具体的引导性评价.

【第九环节】布置作业，课后巩固

1. 教科书习题.

*2. 老师有一个不透明的盒子，盒中有一些球，这些球除颜色外都相同. 如果不将球倒出来数，如何估计盒子中球的个数？请你帮助老师设计一个方案.（长期）

**3. 写一篇有关生日相同概率的小文章，谈谈你的体会和发现.（长期）

**4. 利用树状图求 6 个人中有两个人生肖相同的概率.（长期）

【第十环节】课后探究，拓展延伸

本环节对学生的思维要求较高，仅供部分学有余力的学生阅读，并非对全体学生的要求.

1. 内容

（1）求 6 个人中有 2 个人生肖相同的概率.

先求出“6 个人生肖都不相同”的概率 $P(A)$：要使 6 个人的生肖都不相同，则第一个人的生肖有 12 种可能，第二个人的生肖有 11 种可能……第六个人的生肖有 7 种可能.

$$P(A)=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{12\times12\times12\times12\times12\times12}\approx0.22.$$

因此，“6 个人中有 2 个人生肖相同”的概率为：$P=1-P(A)\approx1-0.22=0.78$.

（2）求 60 个人中有 2 个人生日相同的概率（一年按 365 天计算）.

先求出“60 个人中生日都不相同”的概率$P(A)$：要使 60 个人的生日都不相同，则第一个人的生日有 365 种可能，第二个人的生日有 364 种可能……第60 个人的生日有 306 种可能.

$$P(A)=\frac{365\times364\times363\times\cdots\times306}{\underbrace{365\times365\times365\times\cdots\times365}_{60\text{个}}}\approx0.005\,9.$$

因此，“60 个人中有2个人生日相同”的概率为：$P=1-P(A)\approx 1-0.005\ 9=0.994\ 1$.

2. 目的

巩固学生应用知识的能力，提高探究能力，培养思维的深刻性.

3. 预期

学生会针对此问题展开多种尝试，教师不必介入，可以在学生需要时适时点拨引导，培养学生勇于探究的欲望和能力.

六、案例评析

本教学设计对教学内容的把握和处理，基本符合教科书的编写意图. 葛老师基于自身的教学实践，提供了丰富的学情资源，从而保证了本设计的可操作性. 以下三个方面可借鉴价值比较强，有利于使用者到自己的课堂中进行更好的创新移植.

1. 立足《标准》要求，指导方法，提升能力. 概率这一概念是建立在频率这一统计量稳定性基础之上的，怎样让学生在有限的教学时空中，体会到随机现象的不确定性，以及所呈现的规律性？只有通过大量重复试验，才能发现试验频率的稳定性. 我们看到，葛老师一方面注意对统计的方法和呈现方式进行指导，不同领域、不同年龄段，甚至不同国籍人的生日调查都在教师的设计考量之中；另一方面，葛老师借助将设计方案分类，适时地提炼方法、变式探究、模型类比，使教学环节过渡自然、衔接巧妙，帮助学生感悟概率的模型思想，还为学有余力的学生课后探究做好预设，将研究延伸到课下更广阔的天地中. 整个设计重视教科书的编写意图，又不拘泥于教科书的既定内容.

2. 以学情为先导，推行开放的研究性教学. 本设计引导学生想方法、定标准、做试验、归纳结论，教师注重指导不同层次学生积极参与试验活动，留有足够的时间让学生自主学习、思考；教师总是让学生在开放的情境下先思考、先表现，然后再根据学情进行动态的调整，从而帮助学生学会思考，积累数学活动经验. 著名数学教育家波利亚指出：“学习任何东西，最好的途径是自己去发现.”这正是本节课葛老师教学的着力点.

3. 以评价促进学生发展. 葛老师的教学评价注重针对性、激励性、发展性，能将评价与学习态度、学习方法等有机结合，让学生对自主探究有信心、有方向、有方法.

本节课内容较多，如何既保证学生有充分的思考、活动时间，又能务实高效地完成教学任务，时间分配是个难题，需要老师在研究学生和内容取舍上进行更多的思考.