历史上的欧拉定理

历史上的欧拉定理是关于网络的顶点数、弧数、面数三者之间的一个恒等关系式.

设网络的顶点数为 V,网络的弧数(这里通常把它称为边数)为 E,面数(也就是由边围成的区域的个数)为 F,则有 $V-E+F=1$.

这是由大数学家欧拉(L. Euler,1707—1783)在 1752 年首先发现的,故称之为欧拉定理(公式).该定理是关于网络的一个特别有用的定理,是图论发展中的一个基本公式.在拓扑学中,它提供了一个基本的不变量,用这个定理还可以证明四色定理.

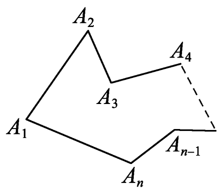
欧拉在当时关心的主要还是多面体,而不仅是平面上的网络.即对于任意封闭的凸多面体,恒有顶点数 V-棱数 E+面数 $F=2$,当凸多面体经过任意的变换时,公式仍然成立,该定理被作为历史上关于拓扑学的第一定理.

上述两个公式在本质上是相同的.事实上,若从多面体上挖掉一个面,然后将剩下的表面作拉伸、压缩等连续变形(拓扑变换),摊开在一张平面上,那么,多面体的原来的边就将形成一个连结原来的顶点的网络,它所包含的顶点数、弧数,仍分别与原来多面体的顶点数和棱数一样多.所不同的是,网络所包含的面数,比原来多面体的面数少 1.反过来,如果有一个平面网络,总可以将它"撑"成缺少一面的多面体.正是这个缺少了的面解释了平面网络公式与多面体公式的差别.故在通常情况下,取欧拉公式的形式为:$V-E+F=2$.

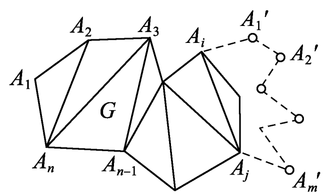
欧拉定理作为一个重要的数学史实,在当今的中学数学教育中占有重要地位.在教学中应充分发挥它的作用.中学几何主要是研究从二维空间到三维空间的点、线、面、体及其各种空间关系,欧拉定理可以说是整个平面几何和空间几何的基础.

可以将欧拉定理应用在平面几何的教学中.欧拉定理可以作为关于平面分割的重要定理,可引导学生发现并更好地理解平面几何中点、线、面之间的关系.

在学生理解欧拉定理的基础上,可以引导学生对欧拉定理用数学归纳法证明.这是中学生需要掌握的数学证明方法.



(1)



(2)

图 6-3

欧拉定理的证明:

对 F 用数学归纳法.

1) 当 $F=2$ 块时,如图 6-3(1),这时 $V=E=n$,故有 $V-E+F=n-n+2=2$,公式成立.

2) 假设 $F=k$ 块时成立,我们要证明对于有 $F=k+1$ 块区域的多边形,该公式也成立.现在假定对如图 6-3(2)中实线围成的平面图形区域 G 有 $F=k$ 块,它满足欧拉公式 $V-E+F=2$.

现要延展这个多边形图到一个新的图,而这时平面的块数是 $k+1$.可任意假设增加 m 个新的顶点 A_1',A_2',A_3',…,A_m',相应地增加了 $m+1$ 条边.故这个新图是由原来的图 G 添上 m 个新的顶点,以及由 $m+1$ 条边组成的弧把 G 图的二个顶点 A_i、A_j 联结起来而成的.现在令新图的顶点数为 V',边数为 E'、块数为 F',则

$$V'-E'+F'=(V+m)-(E+m+1)+(F+1)=V-E+F=2.$$

所以由 1)和 2)知欧拉公式是恒成立的.

欧拉公式的证明提供了一种在图论和四色问题的研究中都很有用的研究方法.