卡尔达诺《大术》中解三次方程的方法

卡尔达诺在《大术》中借助于几何图形的证明并以方程 $x^3+6x=20$ 为例阐述了解三次方程的方法．对于方程 $x^3+px=q$，卡尔达诺在“法则”中得出的求解公式为(用现代符号表示)

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3+\left(\frac{1}{2}q\right)^2}+\frac{1}{2}q}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{1}{3}p\right)^3+\left(\frac{1}{2}q\right)^2}-\frac{1}{2}q}.$$

他的证明实质上是引入 u，v 两个量，并令 $u^3-v^3=q$ 以及 $(uv)^3=\left(\frac{1}{3}p\right)^3$，然后推出 $x=u-v$．他将 u^3，v^3 看成是立方体的体积，其棱长分别为 u 和 v，而乘积 $u\cdot v$ 是两个棱长所形成的矩形的面积，其面积为 $\frac{1}{3}p$，这样，$u^3-v^3=q$ 意味着两个体积之差等于 q，x 就等于两个立方体棱长之差，即 $x=u-v$．借助几何方法可推得

$$x^3=(u-v)^3=u^3-v^3-3(u-v)\cdot u\cdot v=q-px$$

即为原方程．此外，卡尔达诺还解出 $x^3=px+q$，$x^3+px+q=0$，$x^3+q=px$ 三种类型的三次方程，对含有二次项的方程，卡尔达诺给出具体消去二次项的方法．例如对 $x^3+6x^2=100$，令 $x=y-2$，代入后化为 $y^3=12y+84$．这已是目前解三次方程的重要步骤之一．卡尔达诺在《大术》第 17—23 章中专门讲述了处理一般三次方程(四项俱全的方程)的方法，使之对任意三次方程均可求解．