古典难题的挑战——几何三大难题的解决及意义

数学研究需要大胆探索、细心论证.谁能避过重重险滩将思维贯通起来,谁就是最后胜利者.1837 年,23 岁的旺策尔以他的睿智和毅力实现了自己的梦想,证明了立方倍积与三等分任意角不可能用尺规作图法解决,宣布 2 000 多年来,人类征服几何三大难题取得了重大胜利.

他的证明方法是这样的:

假设已知立方体的棱长为 a,所求立方体的棱长为 x,按立方倍积的要求应有 $x^3=2a^3$ 的关系.所以立方倍积实际是求作满足方程 $x^3-2a^3=0$ 的线段 x,但有些方程无有理根,若令 $a=1$,则要作长度为 2 的立方根的线段,但 2 的立方根超出了有理数加、减、乘、除、开方的运算范围,超出了尺规作图准则中所说的数量范围,所以它是不可能解的问题.

用类似的想法,他证明了三等分角也是不可能解的问题.实际上旺策尔还证明了一个被称为高斯—旺策尔定理的定理:如果边数 N 可以写成如下形式 $N=2^t\cdot P_1\cdot P_2\cdot\cdots\cdot P_n$,其中 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 都是各不相同的形如 $2^{2^k}+1$ 的素数,则可用尺规等分圆周 N 份,且只有当 N 可以表示成这种形式时,才可用尺规等分圆周 N 份.根据这一定理,任意角的三等分就不可能了.

1882 年,德国数学家林德曼借助于 $e^{i\pi}=-1$ 证明了 π 的超越性,从而解决了化圆为方的问题.假设圆的半径为 r,正方形的边长为 x,按化圆为方所列代数方程的根,更不能用加减乘除开方所表示,因而不可能用尺规法作图.1895 年,克莱因(F·Klein,1849—1925)又进一步给出了三大难题不可能用尺规来解决的简单而明晰的证明,由此从理论上结束了三大难题的解答历史.从此,古典几何的三大难题都有了答案.

几何作图三大难题之所以是不可能的,主要在于问题条件的约束.如果改变问题的条件,取消“直尺和圆规”的限制,它们是很容易解决的.例如,欧洲文艺复兴时代的大师达·芬奇曾给出化圆为方的一种方法:取一圆柱,使底和已知圆相等,高为半径之半,将圆柱转动一周,产生一个矩形,其面积恰好与已知圆面积相等,再将矩形化为与其等积的正方形,就可实现化圆为方.

几何三大难题本身并没有什么实际意义,但在尝试解决它们的过程中,却得到了许多具有重要意义的成果.例如,微积分思想的萌芽就与化圆为方问题有关.古希腊巧辩学派在讨论化

圆为方过程中，曾提出这样一个新颖的思想：用不断增加圆内接（或外切）正多边形的边数来穷竭圆的面积. 这一思想被下一世纪希腊学者欧多克索斯（Eudoxus，约 408—355）所发展，建立了一种求曲边形的面积、曲面体的体积的方法——穷竭法. 穷竭法本身已是微积分早期的雏形，后来的数学家正是从穷竭法出发，逐步完成微积分的伟大发现的. 然而，一旦改变了作图的条件，问题就会变成另外的样子. 比如直尺上如果有了刻度，则倍立方体和三等分任意角就都是可作的了. 数学家们在这些问题上又演绎出很多故事. 直到最近，中国数学家和一位有志气的中学生，先后解决了美国著名几何学家佩多提出的关于“生锈圆规”（即半径固定的圆规）的两个作图问题，为尺规作图添了精彩的一笔.