高斯正 17 边形尺规作图

1795 年高斯进入哥廷根大学,因为他在语言和数学上都极有天分,为了将来是要专攻古典语文还是数学苦恼了一阵子.到了 1796 年,17 岁的高斯得到了一个数学史上极重要的结果.最为人所知,也使得他走上数学之路的,这就是正 17 边形尺规作图之理论与方法.

希腊时代的数学家已经知道如何用尺规作出正 $2^m \times 3^n \times 5^p$ 边形,其中 m 是正整数,而 n 和 p 只能是 0 或 1.但是对于正 7、9、11 边形的尺规作图法,两千年来都没有人知道.

高斯用直尺和圆规作出了正 17 边形五年之后，他证明了所有能够用直尺和圆规作图的正 n 边形的特征. 他的结论是："一个正 n 边形能用尺规作出，仅仅在 n 可被表示为如下形式时才是可能的：

$$n=2^m\cdot p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_n.$$

其中，p_1，p_2，…，p_n 为互不相同的质数，而且都具有 $2^{2^k}+1$ 这种形式. 特别地，当 n 为质数时，n 具有 $2^{2^k}+1$ 的形式是正 n 边形能由尺规作出的充分必要条件."根据这个结论，人们很容易判断哪些正多边形能由尺规作出，哪些正多边形不能由尺规作出. 例如，正 3，4，5，6，8，10，12，15，16，17，20 边形，甚至正 257 边形和正 65 537 边形，都可以由直尺和圆规作出.

正 257 边形是在 1832 年由一位叫黎西罗的人作出的，作图步骤竟写了八十多页厚厚的一本. 继而一位叫赫姆斯的人耗费十年心血作出了正 65 537 边形，手稿装了满满的一大提箱.

高斯用代数的方法解决两千多年来的几何难题，是他在青少年时代最重要的数学发现. 高斯也视此为生平得意之作，还交代要把正 17 边形刻在他的墓碑上. 但高斯去世后在他的墓碑上并没有刻上正 17 边形，而是正 17 角星棱柱，因为负责刻碑的雕刻家认为，正 17 边形和圆太像了，大家一定分辨不出来.

1989 年 7 月 13—24 日，在高斯的故乡举行了第 30 届国际数学奥林匹克竞赛. 此次竞赛的会徽是正 17 边形，中间镶着高斯的头像.