费拉里发现的一元四次方程的解法

卡尔达诺在《大术》一书中也详细介绍了这个被称为“费拉里方法”的解法.

和三次方程中的做法一样,可以用一个坐标平移来消去四次方程一般形式中的三次项. 所以只要考虑下面形式的一元四次方程:

$$x^4=px^2+qx+r.$$

关键在于要利用参数把等式的两边配成完全平方形式. 考虑一个参数 a,我们有

$$(x^2+a)^2=(p+2a)x^2+qx+r+a^2.$$

等式右边是完全平方式,当且仅当它的判别式为 0,即

$$q^2=4(p+2a)(r+a^2)$$

时,这是一个关于 a 的三次方程,利用上面一元三次方程的解法,我们可以解出参数 a. 这样原方程两边都是完全平方式,开方后就是一个关于 x 的一元二次方程,于是就可以解出原方程的根 x.

具体解法如下:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0,$$

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\lambda\right)^2=x^2\left(\frac{a^2}{4}+2\lambda-b\right)+x(a\lambda-c)+(\lambda^2-d),$$

右边是完全平方，$\Delta=(a\lambda-c)^2-(a^2+8\lambda-4b)(\lambda^2-d)=0$.

原方程将变为三次方程，设一解为 λ_0

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\lambda_0\right)^2=(ax+\beta)^2,$$

$$x^2+\frac{a}{2}x+\lambda_0=ax+\beta,$$

$$x^2+\frac{a}{2}x+\lambda_0=-(ax+\beta),$$

解一元二次方程即得.