斐波那契数列的有趣性质

斐波那契数列有许多好的性质,例如:

性质(1):与黄金分割的关系.

由 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$,有$\frac{F_n}{F_{n-1}}=1+\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$,令$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}=\alpha$,则$\frac{1}{\alpha}=1+\alpha$,

$\alpha^2+\alpha-1=0$,$\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.这便与被开普勒说成是几何学宝藏之一的黄金分割联系起来.

事实上,$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$,它的渐近分数为$\frac{1}{1}$,$\frac{1}{2}$,$\frac{2}{3}$,$\frac{3}{5}$,$\frac{5}{8}$,$\frac{8}{13}$,…其中分子、分母都是斐波那契数列的各项.

斐波那契数列与黄金分割的关系有:

不等式$\frac{1}{2}=\frac{F_2}{F_3}<\frac{F_4}{F_5}<\cdots<\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}<\cdots<G<\cdots<\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}<\cdots<\frac{F_3}{F_4}<\frac{F_1}{F_2}=1$.

黄金分割数位于$\frac{F_n}{F_{n+1}}$与$\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$之间,且更靠近于后者.

通项公式为 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[G^{-n}+(-1)^{n+1}G^n]$.这是由法国敏聂(1786—1856)首次发现的斐波那契数列的通项公式.这样一个各项都是正整数的数列,其通项竟然要用无理数来表示,这是一个十分有趣的事情.

$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right]$,可以用数学归纳法证明.

证：

1° $n=1$ 时 $F_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1$，成立.

$n=2$ 时 $F_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]=1$，成立。

2° 假设对一切 $k<n$ 成立，则

$$F_n=F_{n-2}+F_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

证毕.

性质(2)：F_n 与 F_{n+1} 互素.

性质(3)：$F_{n-1}\cdot F_{n+1}=F_n{}^2+(-1)^n$.

性质(4)：对于任意两个连续的斐波那契数有 $F_{n-1}{}^2+F_{n+1}{}^2=F_{2n+1}$，

$F_{n+1}{}^2-F_{n-1}{}^2=F_{2n}$.

性质(5)：$F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$，

$F_1+F_3+F_5+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$，

$F_2+F_4+F_6+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$，

$F_1{}^2+F_2{}^2+\cdots+F_n{}^2=F_n\cdot F_{n+1}$，

$F_{n+m}=F_{n-1}\cdot F_m+F_n\cdot F_{m+1}$.

性质(6)：对于任意四个相继的斐波那契数 A、B、C、D，有 $C^2-B^2=AD$.

性质(7)：这个结果可能是十分意外的. 因为斐波那契数列都是正整数数列，而通项公式却是用无理数$\sqrt{5}$来表达. 有兴趣的读者不妨把 $n=1,2,3,\cdots$代入通项公式，就会发现所有的$\sqrt{5}$都相互抵消.

性质(8)：用一个固定的正整数除所有的各项，余数都有周期性的变化规律. 比如用 4 除后，余数：1,1,2,3,1,0,1,1,2,3,1,0,1,1,2,3,1,0,…

用 3 除后余数：1,1,2,0,2,2,1,0,1,1,2,2,2,1,0,1,1,…

性质(9)：每第三个数可被 2 整除，每第四个数可被 3 整除，每第五个数可被 5 整除，每第六个数可被 8 整除，等等. 这些除数本身也构成斐波那契数列.

性质(10)：法国数学家鲁卡斯(Lucas)资助他构造出了一个与斐波那契数列相类似的数列：1,3,4,7,11,18,29,47,76,…

运用递推公式可得鲁卡斯数列的通项 $L_n=C_1\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$.

由 $L_1=1, L_2=3$，得 $C_1\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+C_2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=1, C_1\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+C_2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=3$，

解得 $C_1=1, C_2=1$. 故鲁卡斯数列 L_n 的通项公式为 $L_n=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$.

鲁卡斯数列 L_n 与斐波那契数列有相同的性质，且有 $L_n \cdot F_n=F_{2n}$. 而鲁卡斯数列 L_n 的一般项也有敏聂公式类似的结果.

上述介绍的求解递推方程的方法在解微分方程中也用到类似的方法，希望读者深入理解. 鲁卡斯还把斐波那契数列用于研究素数的分布，得到一些有价值的结果.

由于斐波那契数列是一个十分奇特的数列，故 1963 年成立了斐波那契协会，美国出版一份季刊《斐波那契季刊》专门登载有关这个数列性质的最新发现. 尽管斐波那契数列的通项公式和关于斐波那契数列的一系列成果是后人得到的，但我们应该承认：这些数学成果都起因于斐波那契数列在《算盘书》中的“生兔子问题”.