

## 第三次数学危机

第三次数学危机,发生在19世纪末.当时英国数学家罗素把集合分成两种.第一种,集合本身不是它的元素,即 $A \notin A$ ;第二种,集合本身是它的一个元素,即 $A \in A$ ,例如一切集合所组成的集合.那么对于任何一个集合 $B$ ,不是第一种集合就是第二种集合.

假设第一种集合的全体构成一个集合 $M$ ,那么 $M$ 属于第一种集合还是属于第二种集合?如果 $M$ 属于第一种集合,那么 $M$ 应该是 $M$ 的一个元素,即 $M \in M$ ,但是满足 $M \in M$ 关系的集合应属于第二种集合,出现矛盾.如果 $M$ 属于第二种集合,那么 $M$ 应该是满足 $M \in M$ 的关系,这样 $M$ 又是属于第一种集合,矛盾.

以上推理过程所形成的悖论叫罗素悖论.由于严格的极限理论的建立,数学上的第二次危机已经解决,但极限理论是以实数理论为基础的,而实数理论又是以集合论为基础的,现在集合论又出现了罗素悖论,因而形成了数学史上更大的危机.从此,数学家们就开始为这场危机寻找解决的办法,其中之一是把集合论建立在一组公理之上,以回避悖论.首先进行这个工作的是德国数学家策梅罗,他提出七条公理,建立了一种不会产生悖论的集合论,又经过德国的另一位数学家弗芝克尔的改进,形成了一个无矛盾的集合论公理系统,即所谓ZF公理系统.这场数学危机到此缓和下来.

数学危机给数学发展带来了新的动力.在这场危机中集合论得到较快的发展,数学基础的进步更快,数理逻辑也更加成熟.然而,矛盾和人们意想不到的事仍然不断出现,而且今后仍然会这样.