贝克莱的挑战

微积分创立不久，爱尔兰主教、唯心主义哲学家贝克莱(1685—1753)嘲笑“无穷小量”，贝克莱对牛顿的导数定义进行了批判. 现在我们知道导数的定义是这样的：函数 $y=f(x)$ 对 x 的

导数定义为极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

而当时牛顿的导数定义(他当时称为流数)是这样的：

当 x 增长为 $x+t$ 时，幂 x^3 成为 $(x+t)^3$ 或 $x^3+3x^2t+3xt^2+t^3$，x 与 x^3 的增量分别为 t 和 $3x^2t+3xt^2+t^3$，这两个增量与 x 的增量 t 的比分别为 1 与 $3x^2+3xt+t^2$，然后让增量消失，则它们的最后比将为 1 与 $3x^2$，从而 x^3 对 x 的变化率为 $3x^2$. 我们知道这个结果是正确的，但是推导过程确实存在明显的偷换假设的错误：在论证的前一部分假设 t 是不为 0 的，而在论证的后一部分又被取为 0. 那么到底 t 是不是 0 呢？这就是著名的《贝克莱悖论》.

不仅当时导数的定义中出现了悖论，在无穷级数的理论中也出现了许多悖论. 如级数

$$S=1-1+1-1+1-1+\cdots$$

那么 $S=$？如果我们把级数以一种方法分组，我们有

$$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0,$$

如果按另一种方法分组，我们有

$$S=1-(1-1+1-1+1-1+\cdots)=1-0=1.$$

格兰迪(Grandi，1671—1742)说，因为 0 和 1 是等可能的，所以级数的和应为平均数$\frac{1}{2}$. 最后，还可以证明 S 等于$\frac{1}{2}$，因为

$S=1-(1-1+1-1+\cdots)$，

$S=1-S$，

$2S=1$，

$S=\frac{1}{2}$.

所以 $0=1=\frac{1}{2}$！

还不止于此，格兰迪还说，你想创造什么数，我也可以创造出什么数. 比如说想创造 16，因为 $16\times S=16\times S$，既然 S 可以为 0，也就可以为 1. 这时

$$16\times 0=16\times 1,$$

得到 $0=16$，说明从无中创造出 16.