

百鸡问题

百鸡问题为著名的不定方程组问题,出自于《张丘建算经》.该书完成于北魏献文帝期间(公元5世纪下半叶).张丘建,清河(今属山东)人,生平不详.全书现存92题,其中的突出贡献是有了求最小公倍数的方法,创造了计算等差级数各元素的公式.卷下最后一问是百鸡问题,为著名的不定方程问题,影响极大.

“今有鸡翁一值钱五,鸡母一值钱三,鸡雏三值钱一,凡百钱买鸡百只,问鸡翁、母、雏各几何?”

依术列出方程

$$\begin{cases} x+y+z=100, \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100. \end{cases}$$

《张丘建算经》认识到这是一个不定问题,并给出了(4,18,78),(8,11,81),(12,4,84)三组解,是其全部正整数解.《张丘建算经》提示了解法:

术曰:鸡翁每增四,鸡母每减七,鸡雏每益三,即得.

这个提示太简括,其具体作法后人有若干猜测.钱宝琮的理解是:以3乘第2行,减第1行,化成 $7x+4y=100$,其中 $4y$ 与100都是4的倍数,因此 x 应是4的倍数: $x=4t$,那么 $y=25-7t$, $z=75+3t$,今 $t=1,2,3$,则 $x=4,8,12$, $y=18,11,4$, $z=78,81,84$.因为正数解,故 x 不能为0或负数,也不能大于12,只能有以上三组解.后来人们一直未找到百鸡问题的一般解法.直到19世纪中叶,宋元数学复兴之后,骆腾凤《艺游录》、时曰醇《百鸡术衍》用大行求一术求解,才找到一般解法.百鸡问题对阿拉伯、欧洲数学产生了巨大影响.13世纪意大利斐波那契的《算盘书》,中世纪阿拉伯的阿尔·卡西的《算术之钥》都有百鸡问题,显然源于中国.