著名悖论举例

由于悖论的起源和发展几乎与科学史同步，所以悖论已经历了几千年漫长的发展和演变过程，因而种类繁多，无法一一列举，下面仅举几个典型例子.

1. 说谎者悖论

公元前 6 世纪，克里特人构造了这样一个语句，一个克里特人说：“所有克里特人说的每一句话都是谎话.”试问这句话是真是假？这里给出这句话是真是假的逻辑论证：假设它是真的，即所有克里特人说的每一句话都是谎话，由于这句话正是克里特人所说，故根据此话的论断可推出这句话是假的.由此可见，由这句话的真可推出它是假的.显然，这是一个逻辑矛盾.产生矛盾的原因是，命题的论断中包含了前提，语言结构层次的混乱.具体地讲，这是一句话套话的句子，且被套的话就是套它的话自身，或者说被断定的话与断定的话混而为一.

2. 罗素悖论

此论是罗素于 1902 年提出的，叙述如下：罗素构造了一个集合 S：S 由一切不是自身元素的集合所组成.然后罗素问：S 是否属于 S 呢？根据排中律，一个元素或者属于某个集合，或者不属于某个集合.因此，对于一个给定的集合，问是否属于它自己是有意义的.但对这个看似合理的问题的回答却会陷入两难境地.如果 S 属于 S，根据 S 的定义，S 就不属于 S；反之，如果 S 不属于 S，同样根据定义，S 就属于 S.无论如何都是矛盾的.

图 8-1　罗素

3. 康托尔悖论

设集合所有集合的集合，试问集合的基数与集合的幂集的基数，哪个大.设 V 是由一切集合所组成的集合.考虑集合 V 的基数 $\overline{V}$，康托尔证明，V 的幂集 $P(V)$ 的基数 $\overline{\overline{P}}(V)$ 大于 $\overline{\overline{V}}$；但根据 V 的定义，任何集合都是 V 的子集，因而不存在其基数大于 $\overline{V}$ 的集合，自相矛盾.

这些悖论在当时震动了数学界.产生悖论的原因是那时的集合论本身还不够严格.为了避免悖论，数学家们重新研究集合的概念，进行严格整理，于是产生了多种集合论公理系统.

4. 理发师悖论

罗素讲过这样一个故事:有一个村庄的理发师立下了“只为所有不自己理发的人理发”的规矩.于是有人问他:“理发师先生,您的头由谁理呢?”这可难住了理发师.因为从逻辑上讲有两种可能性,自己给自己理或请别人给自己理.但若自己给自己理,那就违背了立下的规矩;如果请别人给自己理,那他自己就成了“不自己理发的人”,按照规矩,他应该给自己理发.无论怎样都和自己的规矩相冲突.看来这位理发师真是遇到难题了.这就是罗素于20世纪初提出的著名的理发师悖论,或称罗素悖论.罗素悖论标志着第三次数学危机的开始,由此导致了对数学基础的广泛讨论.实际上,与罗素悖论本质上完全一样的说谎者悖论早在公元前4世纪就由古希腊数学家欧几里得提出,即“我正在说的这句话是谎话”.这句话到底是真话还是谎话呢?这也是一个无法自圆其说的论题.

5. 理查德悖论

这个悖论是1905年提出的,现已有很多不同的表达形式,这里仅就其中的一种陈述如下:将自然数的所有性质编成号码.如果一自然数与与之对应的性质描述语组成的语句为真,就说它不是理查德数,否则就说它是理查德数.令“是理查德数”的自然数编号为i,此时便有:如果i是理查德数,则有“i是理查德数”为真,于是就有i不是理查德数;如果i不是理查德数,则有“i是理查德数”为真,于是又有i是理查德数.此即所谓“理查德悖论”.