圆面积公式及圆周率究竟是怎样推求的?

刘徽之前,一直以“周三径一”作为圆的周、径之比值.从东汉到魏晋以来,改进圆周率的精度始终为数学家所关注,但都未找到圆周率的科学计算方法.刘徽把机械化方法和极限思想应用于近似计算,在中国第一次提出了求圆周率近似值的科学方法,这是他的重大贡献.

首先,刘徽从圆内接正6边形开始割圆.他说:“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣.”即是说,如此继续下去,对于这个正 $6\times 2^n(n=0,1,2,3,\cdots)$ 边形序列,设 S_n 是 6×2^n 边形的面积,L_n 是每边长,割得越细,即 n 越大,$S-S_n$ 就越少,割至不可割时,则圆内接正多边形便与圆周合为一体,这就证明了

$$\lim_{n\to\infty} 6\times 2^n L_n = L.$$

此时,$\lim\limits_{n\to\infty}(S-S_n)=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

$$S_n < S < S_{n-1} + 2(S_n - S_{n-1}). \tag{1}$$

但随着“割之又割”,余径 r_n 越来越小,即 $n\to\infty$ 时,$r_n\to 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}[S_{n-1} + 2(S_n - S_{n-1})] = S.$$

这样,刘徽以不可割的极限状态,证明了与圆周合为一体的正多边形的面积就是圆面积.

最后,刘徽“觚而裁之”,即对于与圆周合为一体的正多边形进行无穷小分割,分成无穷多个以正多边形每边为底,以圆心 O 为顶点的小等腰三角形,圆的面积 S 等于这无穷多个小三角形的面积之总和,即

$$S = \sum S_{小\triangle} = \sum \frac{lr}{2} = \frac{Lr}{2}. \tag{2}$$

这样,通过对直线形的无穷小分割,然后求其极限状态的和的方式,就证明了圆面积公式为圆周长与半径乘积的一半.即 $S=\dfrac{1}{2}Lr$.

以上刘徽的“割圆术”开辟了崭新的、精确地解决圆面积问题的方法.而他关于圆周率近似

计算的科学方法，就是以证明圆面积精确公式为基础的.

刘徽取直径为 2 尺的圆，因此圆内接正 6 边形边长为 1 尺，按割圆程序，割圆内接正 6 边形为正 12 边形时，两次利用勾股形中勾股定理. 以上程序完全可以递推，于是可以依次求出圆内接正 6×2^1 边形的边心距、余径；正 6×2^2 边形的边心距、余径；正 6×2^3 边形的边长、边心距、余径；以及正 6×2^4 边形的面积 S_4、边长；6×2^5 边形的面积 S_5.

刘徽算出 S_5，再求出差幂 S_5-S_4，则 $2(S_5-S_4)$ 为 6×2^4 边形各边长乘余径的总面积：$S_4+2(S_5-S_4)$. 由于(1) 式，有

$$S_5<S<S_4+2(S_5-S_4).$$

圆面积 S 必在所求得两数之间，刘徽舍弃了分数部分，取 314 寸^2 作为圆面积的近似值，以此代入已证明的公式(2)，求得 L，再与直径 $d=2$ 尺相约得 $\pi=\dfrac{L}{d}=\dfrac{157}{50}$，相当于 $\pi=3.14$，后人称 $\dfrac{157}{50}$ 为"徽率". 从理论上讲，利用这种方法可以求得任意精度的圆周率近似值，这一点刘徽是十分清楚的.

刘徽开创的求圆周率的科学方法和程序，通过圆内接正多边形逼近圆的方法，使之赶上并超过了阿基米德而独立取得的伟大成就，也因此奠定了以后我国在圆周率计算方面领先世界其他民族千余年的理论基础，成为中华古算发达的重要标志. 事实上，刘徽计算到 S_5 得到一个更精确的数据 $\pi=\dfrac{L}{d}=\dfrac{3\ 927}{1\ 250}$，相当于 $\pi=3.141\ 6$. 他又依次求出圆内接正 $6\times 2^8=1\ 536$ 边形的边长，得出了正 $6\times 2^9=3\ 072$ 边形的面积 S_9，求出周、径相与之率，重新验证了上述数值是比较精确的. 据推测，我国南北朝的著名数学家祖冲之(429—500)就是依据刘徽的这套割圆程序求得圆周率值 π 在 3.141 592 6 与 3.141 592 7 之间的. 如果这种推测正确的话，那么，祖冲之需要计算出圆内接正 6 144 边形和 12 288 边形的面积. 祖冲之的圆周率值领先世界达千年之久，成为广大炎黄子孙的自豪和骄傲. 在国外，直到 1427 年，中亚数学家阿尔 · 卡西才超过了 8 位有效数字，而祖冲之的密率 $\dfrac{355}{113}$，直到 16 世纪末才由德国的奥托等提出. 因此，数典不能忘祖，今天对圆面积公式及圆周率近似值的科学推算史实的澄清，将给我们的数学教学以重要启示：它使我们重新认识了作为数学家的刘徽——他的无穷小分割思想、极限思想、机械化的方法，他做出的贡献及其深远的历史影响，这就为在教学中增强学生爱国主义情感和民族自豪感提供了客观、公正的数学史实，因而能更好地发挥其教育价值.