用平衡法求出来的球体积公式

阿基米德创立的平衡法，即杠杆原理，在求面积和体积时有重要的应用. 有这样一个故事：阿基米德曾利用平衡法“称”出了球体积公式.

用一根长为球直径 2 倍的长杆，即长为 $4r$ 的杆，确定一个支点 N. 将杆的中点支于支点. 两端点设为 S、T. NT 的中点为 O. 以 O 为心，以球半径 r 为半径画圆，并画圆的外切正方形及等腰三角形 NBC，使 $\angle CNT=\angle BNT=45°$. 该图形绕 ST 旋转得到球、圆柱和圆锥.

在离支点 x 处切一铅直狭条，宽度记为 Δx. 旋转后得到的是厚为 Δx 的圆盘. 这些薄片体积的近似值分别是：

球部分：$\pi x(2r-x)\Delta x$；

圆柱部分：$\pi r^2\Delta x$；

圆锥部分：$\pi x^2\Delta x$.

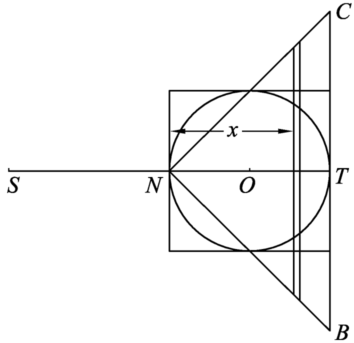

图 2-3

阿基米德将从球和圆锥割出的两个薄片吊在端点 T，它们的合力矩（重力×重力臂）为

$$\begin{aligned}2r[\pi x(2r-x)\Delta x+\pi x^2\Delta x]&=4\pi r^2x\Delta x\\&=4x\cdot(\pi r^2\Delta x).\end{aligned}$$

这正好是圆柱部分薄片吊在原处力矩 $x\cdot\pi r^2\Delta x$ 的 4 倍.

把从 N 到 T 所有割出的薄片加在一起，将球和圆锥用绳子吊在 S 点，其力臂是 $2r$，把圆柱的重心吊在 O 点，它的力臂是 r. 它们的力矩也应满足 4 倍关系，即球和圆锥吊在 S 点与 4 个圆柱吊在 O 点杠杆平衡，于是

$$2r(\text{球体积}+\text{圆锥体积})=4r(\text{圆柱体积}).$$

已知

$$\text{圆锥体积}=\frac{8}{3}\pi r^3,$$

$$\text{圆柱体积}=2\pi r^3,$$

代入后立得

$$\text{球体积}=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

由此公式可得球体积是它的外切正圆柱体积的 $\frac{2}{3}$.

多么精彩的方法. 竟然用秤称出了球的体积公式. 当然阿基米德在称得球体积公式以后，仍然用数学方法严密地证明了他的发现. 阿基米德的方法启示我们，数学定理与公式蕴藏在现实世界之中，它们往往与物理、化学、生物学…的规律联系在一起，我们可以通过物理的、化学的、生物的方法去发现它们.