用单位根表示一元三次方程的解

1．解方程 $x^3=1$.

$\because$ $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$，

$\therefore$ $(x-1)(x^2+x+1)=0$，

$\therefore$ $x_1=1, x_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, x_3=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

若 ω 表示 $\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ 或 $\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，则 $1, \omega, \omega^2$ 是 $x^3=1$ 的三个根. 这些根叫作三次方程的单位根.

2．解方程 $x^3=a$.

方程可化为 $\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{a}}\right)^3=1$.

于是

$$x=\sqrt[3]{a}\omega^{i}(i=0,1,2)$$

是原方程的三个根.

3. 解方程 $x^3+ax+b=0$.

将方程变形为可以求解的二次方程的形式. 为此,将 x 分拆成两个未知数,令

$$x=u+v,$$

代入原方程得到

$$u^3+v^3+3u^2v+3uv^2+a(u+v)+b=0$$

$$u^3+v^3+b+(3uv+a)(u+v)=0.$$

只要 $u^3+v^3+b=0$, $3uv+a=0$,便保证了 $x=u+v$ 是原方程的根. 为此解方程组

$$\begin{cases}u^3+v^3=-b,\\ uv=-\dfrac{a}{3}.\end{cases}$$

方程组可变为

$$\begin{cases}u^3+v^3=-b,\\ u^3v^3=-\left(\dfrac{a}{3}\right)^3.\end{cases}$$

由二次方程根与系数的关系,u^3、v^3 满足方程

$$y^2+by-\left(\frac{a}{3}\right)^2=0.$$

于是

$$u^3=-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}=A,$$

$$v^3=-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}=B.$$

u, v 各有三个值,设 u_0, v_0 各是一值,则另外两个值分别为 $u_0\omega$, $u_0\omega^2$; $v_0\omega$, $v_0\omega^2$.

由于 $uv=-\dfrac{a}{3}$,所以 u, v 共有三组值

$$\begin{cases}u_0,\\ v_0,\end{cases}\quad\begin{cases}u_0\omega,\\ v_0\omega^2,\end{cases}\quad\begin{cases}u_0\omega^2,\\ v_0\omega.\end{cases}$$

所以原方程的三个根是

$$x_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}, x_2=\sqrt[3]{A}\omega+\sqrt[3]{B}\omega^2, x_3=\sqrt[3]{A}\omega^2+\sqrt[3]{B}\omega.$$

$\Delta=\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{a^3}{27}$ 叫做方程 $x^3+ax+b=0$ 的判别式.

(1) 当 $\Delta>0$ 时,u^3, v^3 都是实数,且 $u^3\neq v^3$. 它们的立方根表示为 $\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[3]{B}$. 原方程的根是

$$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}, \sqrt[3]{A}\omega+\sqrt[3]{B}\omega^2, \sqrt[3]{A}\omega^2+\sqrt[3]{B}\omega.$$

(2) 当 $\Delta=0$ 时,u^3, v^3 都是实数,且 $u^3=v^3$. 它们的立方根为 $-\sqrt[3]{\dfrac{b}{2}}$,方程的根为

$$-2\sqrt[3]{\frac{b}{2}}, \sqrt[3]{\frac{b}{2}}, \sqrt[3]{\frac{b}{2}}.$$

(3) 当 $\Delta<0$ 时,u^3, v^3 是共轭虚数,方程有三个不同的实根.

对一般的一元三次方程

$$y^3+ay^2+by+c=0(a\neq0).$$

我们设法将二次项消去.令

$$y=x+k,$$

代入方程得到

$$x^3+(3k+a)x^2+(3k^2+2ak+b)x+(k^3+ak^2+bk+c)=0.$$

取 $k=-\frac{a}{3}$,方程变为

$$x^3+px+q=0.$$

其中

$$p=\frac{a^2}{3}-\frac{2a^2}{3}+b=-\frac{a^2}{3}+b,$$

$$q=-\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{ab}{3}+c=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c.$$