盈不足算法的应用

《九章算术》第七章为盈不足章.主要解决盈亏问题.它的前8题,以“共买物”问题为模型,给出了各类盈亏问题求解的演算法则,盈不足问题可表达为下面的数学模型:

今有共买物,人出(钱)a_1,盈b_1;人出(钱)a_2,不足b_2,问人数、物价各几何?

《九章》给出了两种盈不足术,其一为:

“置所出率,盈、不足各居其下.令维乘所出率,并,以为实.并盈、不足为法.实如法而一.有分者,通之.盈、不足相与同其买物者,置所出率,以少减多,余,以约法、实.实为物价,法为人数.”

依据造术原理,作为RMI定映手段的盈不足术的演算过程就是以齐同原理、今有术为基

本内容的率的变换，是基于直线内插思想运用和机械化的算法.

$$\begin{matrix}\text{置所出率}\\\text{盈、不足}\end{matrix}\begin{bmatrix}a_2 & a_1\\ b_2 & b_1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{维乘}}\begin{bmatrix}a_2b_1 & a_1b_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{并}}\begin{bmatrix}a_2b_1+a_1b_2\\ b_1+b_2\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{法}]{\text{实}\quad\text{实如法而一}}$$

$\dfrac{a_2b_1+a_1b_2}{b_1+b_2}$为每人应付的钱数.

$$\begin{bmatrix}a_2 & a_1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{以少减多}}a_1-a_2\begin{cases}\text{约实}\to\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_1-a_2}\text{为物价，}\\ \text{约法}\to\dfrac{b_1+b_2}{a_1-a_2}\text{为人数.}\end{cases}$$

例 1:《九章算术》盈不足章第 13 题:“今有醇酒一斗，值钱五十；行酒一斗，值钱一十. 今将钱三十，买酒二斗. 问醇、行酒各几何?”

本题的术文是:“假令醇酒五升，行酒一斗五升，有余一十. 令之醇酒二升，行酒一斗八升，不足二.”古代的换算关系是:一斗为十升.

这实质上就是巧妙利用两次假设，构造了盈不足模型. 例如若把醇酒改成每人出钱数，本题就转化为:

今有共买物，人出(钱)五，盈一十；人出(钱)二，不足二，问每人应出多少钱?

因此，对于醇酒，有盈不足模型:

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\ 2 & 10\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{代入盈不足公式就可求得醇酒:}}\frac{2\times10+5\times2}{10+2}=\frac{5}{2}(\text{升}).$$

同样，对于行酒，也可得出盈不足模型:

$$\begin{bmatrix}18 & 15\\ 2 & 10\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{代入盈不足公式就可求得醇酒:}}\frac{18\times10+15\times2}{10+2}=\frac{25}{2}(\text{升}).$$

应当指出的是，盈不足具有模型化的方法，这是从数学方法论的角度来分析的，是说一般的“盈不足问题”就是所构造的数学模型.

从现代算法来说，“盈不足问题”相当于解方程组$\begin{cases}y=a_1x-b_1,\\ y=a_2x+b_2,\end{cases}$就算法来说，相当于三个公式:$x=\dfrac{b_1+b_2}{a_1-a_2}$，$y=\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1-a_2}$，$\dfrac{y}{x}=\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$.

这种方法实际上就是现代的线性插值法，也叫试位法、双假位法，为中国首先发明，比西方早 1 200 年. 意大利数学家斐波那契(1170—1250 年)最先向欧洲介绍这种算法，并称为“契丹算法”.