五种正多面体

我们熟知的五种正多面体是正四面体、立方体、正八面体、正十二面体和正二十面体，它们的顶点、棱、面的数目列表如下：

多面体名称	顶点数	棱数	面数
正四面体	4	6	4
立方体	8	12	6
正八面体	6	12	8
正十二面体	20	30	12
正二十面体	12	30	20

对以上的结论进行推广同时将方法进行类比，再应用欧拉定理，我们就不难得到如下一条定理.

定理：所有面都是同边数的多边形，所有多面角都是同棱数的多面角的多面体只有5种.

证明：设从该多面体的每一顶点发出 m 条棱，有 V 个顶点，共发出 mV 条棱. 由于每一条棱都有两个端点，故得

$$mV=2E. \qquad ①$$

设每一个面都是 n 边形，即有 n 条棱，F 个面，共有 nF 条棱，但每条棱又都是相邻两个面的边，故得

$$nF=2E. \qquad ②$$

由①、②解出 V、E 代入欧拉公式，得

$\dfrac{n}{m}F+F-\dfrac{n}{2}F=2$，有 $F=\dfrac{4m}{2n-(n-2)m}$ 为正整数，从而，$2n-(n-2)m>0$，$\dfrac{2n}{n-2}>m\geqslant 3$，

所以，$3\leqslant n<6$. 当 $n=3$ 时，可解出，$\begin{cases} m_1=3, \\ F_2=4, \end{cases}$ $\begin{cases} m_2=4, \\ F_2=8, \end{cases}$ $\begin{cases} m_3=5, \\ F_3=20; \end{cases}$

当 $n=4$ 时，$\begin{cases} m_4=3, \\ F_4=6; \end{cases}$ 当 $n=5$ 时，$\begin{cases} m_5=3, \\ F_5=12. \end{cases}$

从而对应的多面体只有5种：四面体、六面体、八面体、十二面体和二十面体.

另外，由于欧拉公式只涉及多面体表面顶点、棱和面的数目，而与多面体内部无关，因此，可以就多面体的表面——闭多面形，来讨论欧拉定理的推广与应用，欧拉定理的适用范围可以再扩大.