# 无穷的本质

无穷大的数，如“所有自然数(正整数)的个数”、“一条线上所有几何点的个数”. 这些数是随着数学的发展必然被人们发现的. 第一次数学危机促使严格的实数(包括有理数和无理数)理论的建立，第二次数学危机则使极限理论成为微积分的主要工具. 极限理论也是以实数理论为基础的，而实数的数目就是无穷的. 对于无穷大的数能否进行比较?

“所有自然数的个数和一条线上所有几何点的个数哪一个大些?”这一问题乍一看真是不可思议，但著名的数学家康托尔首先思考了这一问题，并指出二者是不一样大的. 让第一位乘客坐在第一个座位上，第二位乘客坐在第二个座位上……这样一直相比下去. 如果最后座位用光了，还剩下些乘客，他就知道乘客多于座位；如果乘客都坐下了，座位还有多余，他就会明白座位多于乘客；如果乘客都坐下了，座位也正好用完，他就会晓得，乘客和座位数目相等. 康托尔所提出的比较两个无穷大数的方法与此是相同的，即给两组无穷大数列中的每一个数一一配对，如果这两组最后一个都不剩，这两组无穷大就是相等的；如果有一组还有些没有配完，这一组就比另一组大些. 这种方法显然是合理且实际上也是唯一可行的方法. 例如，偶数的数目与整数的数目是同样多的. 当然，这个结论看起来是非常荒谬的，因为偶数只是整数的一部分，这与整体大于部分的直觉显然矛盾. 由于这种矛盾首先是伽利略发现的，故称“伽利略悖论”. 康托尔认为，伽利略悖论并非什么“悖论”. 任何两组东西，只要能相互一一对应，就是一样多. “整体大于部分”这条规律只有在有穷的情况下正确. 在无穷大的世界里，部分可能等于全体! 这就是无穷的本质.

对于有穷和无穷的特点，著名数学家希尔伯特的一则小故事给予了最好的说明：某旅游胜地有一家旅馆，内设有穷个房间. 由于是旅游旺季，所以，所有的房间都已客满. 这时，来了位客人想订个房间. “对不起，”店主说，“所有房间都住满了.”客人无可奈何地来到另一家旅馆. 这家旅馆与别的旅馆并无多大不同，只是房间数不是有穷而是无穷多个，号码为 1，2，3，… 这位客人到来时，所有房间也已住满，但他疲惫已极，坚持要住下. 旅馆老板只得耐心劝说：“满了就

是满了,非常对不起!”正好这时候,聪明的老板的女儿来了.她看见客人和她爸爸都很着急,就说:“这不成问题!请每位房客都搬一下,从这房间搬到下一间.”于是,1号房间的客人搬到2号,2号房间的客人搬到3号……依次类推.最后,这位客人住进了已被腾空的1号房间.

第二天,又来了一个有无穷多位旅客的庞大旅游团要住旅馆,这下又把老板难住了.老板的女儿又出来解围:“这好办,您让1号房客搬到2号,2号房客搬到4号,3号房客搬到6号……这样,1号、3号、5号等单号房间就都空出来了,新来的无穷多位客人就可以住进去了.”

来多少客人都难不倒聪明的老板女儿,于是,这家旅馆越来越繁荣.后来,老板的女儿考入了大学数学系.有一天,康托尔教授来上课,听说此事后问她一个问题:“你能不能给1寸长线段上的每一点安排一个房间?”

她绞尽脑汁,想要安排一下,但终于失败了.康托尔教授告诉她,1寸长线段上点的数目和自然数的数目尽管都是无穷的,但却不是一样大的无穷.线段上的点要比自然数的个数多得多,任何想安排下的方案都是行不通的.为了证明,我们给它们建立一一对应关系.

线段上每一点可用这一点到这条线的一端的距离来表示,而这个距离可写成小数形式:

1. $0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots\cdots$

2. $0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}$

3. $0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots\cdots$

……

$k$. $0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}a_{k4}$

现在我们可任选一个实数 $d=0.b_1b_2b_3\cdots\cdots$,其中 $b_k\neq a_{kk}$,同样,$b_1\neq a_{11}$,$b_2\neq a_{22}\cdots$显然,$d$ 不等于上述任何数,因为至少第 $k$ 位 $b_k\neq a_{kk}$.这样,线上的点与自然数之间的一一对应就建立不起来,线上的点数所构成的无穷大数大于自然数所构成的无穷大数.

可以证明且令人惊异的是,无论线段是1寸长,1尺长还是和赤道一样长,上面的点数都是相同的.而且,平面、立方体上所有的点数与线段上所有的点数也是相等的.这种无穷是比自然数、分数的数目更高一级的无穷.同样可以证明,所有几何曲线的数目是第三级的无穷.到目前为止,还没有人想象得出更大的无穷大数.这三级无穷大数就足以包括我们想到的所有无穷大数了.