塔尔塔利亚发现的一元三次方程的解法

一元三次方程的一般形式是 $x^3+ax^2+bx+c=0$，如果作一个横坐标平移 $y=x+\frac{a}{3}$，那么我们就可以把方程的二次项消去. 所以我们只需考虑形如 $x^3=px+q$ 的三次方程.

假设方程的解 x 可以写成 $x=a-b$ 的形式，这里 a 和 b 是待定的参数. 代入方程，我们就有

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=p(a-b)+q,$$

整理得到

$$a^3-b^3=(a-b)(p+3ab)+q.$$

由二次方程理论可知，一定可以适当选取 a 和 b，使得在 $x=a-b$ 的同时，$3ab+p=0$. 这样上式就成为

$$a^3-b^3=q,$$

两边各乘以 $27a^3$，就得到

$$27a^6-27a^3b^3=27qa^3,$$

由 $p=-3ab$ 可知

$$27a^6+p^3=27qa^3.$$

这是一个关于 a^3 的二次方程，所以可以解得 a. 进而可解出 b 和根 x.