

双曲几何模型

双曲几何是一种“弯曲”的空间,在爱因斯坦的广义相对论中发挥着重要作用.双曲几何还在拓扑领域有许多应用.

非欧几何使用被称作双曲几何的非欧几何的一种有界的二维模型(庞加莱模型).第一次启动非欧几何时所出现的大空圆叫做“边界圆”.边界圆是屏幕的绘图区,它含有整个无穷的二维双曲空间.

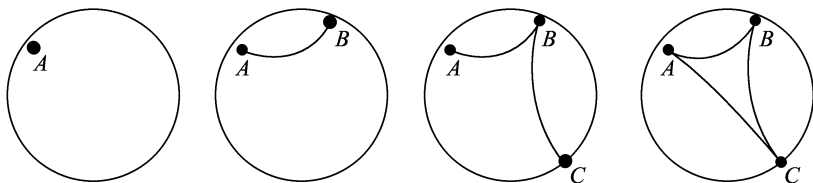


图 6-5

图 6-5 所示的双曲几何三角形 ABC 看上去是弯曲的.而实际上在双曲几何中组成它的三条边完全是笔直的.双曲几何中的大多数直线从通常的欧氏几何的角度看似乎是弯曲的.如果将你带到双曲几何世界的内部,那么你会看到,在这个仿真图中所显示的所有的“直线”全是直线.

平行线是在同一平面上无限长而不相交的直线.在上图中,双曲直线 BA 和双曲直线 BC 是在同一平面上的两条无限长直线.它们相交于点 B ,因此它们不是双曲平行线.如图 6-6,双曲直线 DE 和双曲直线 BA 都是同一平面上的无限长直线,由于它们不相交,因此 DE 平行于 BA .同样,双曲直线 DE 也平行于双曲直线 BC .这很奇怪,因

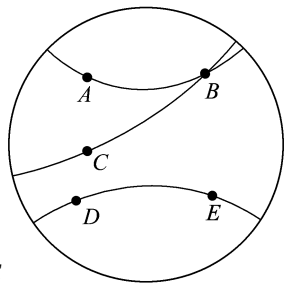


图 6-6

为我们知道在欧几里得几何中，

如果两条直线与第三条平行，那么该两条直线互相平行。

这是欧几里得几何而非双曲几何中的一个定理，它被上面的反例证伪(BA 和 BC 都平行于 DE ，但 BA 并不平行于 BC)。但你可能不相信 BA 与 DE 是平行线。为了使人相信，首先要强调上面所显示的每条线都是无限长的，尽管看上去并不是无限的。我们一般认为无限长的直线永远延伸下去，而实际上，无限长直线是没有终点的直线。“无限延伸”与“没有终点”并不是一回事。要记住在这个双曲几何模型中，随着物体越来越靠近边界圆而变得越来越小，而从边界圆内的任一点到边界圆的边界的距离是无限的。即使双曲线段有一亿英里长，它仍然不会达到边界圆，而这条线段的两头都可延伸。