秦九韶的“大衍总数术”

下面以秦九韶《数书九章》中余米推数题为例，对大衍总数术的完整程序作以说明. 该题是一件关于盗窃案的侦破术，原题为：

问：有米铺，诉被盗去米一般三箩，皆适满，不记细数. 今左壁箩剩一合，中间箩剩一升四合，右壁箩剩一合. 后获贼，系甲、乙、丙三名. 甲称当夜摸得马勺，在左壁箩，满舀入布袋；乙称踢着木履，在中箩，舀入袋；丙称摸到漆碗，在右壁箩，舀入袋，将归食用. 日久不知数. 索得三器，马勺满容一升九合，木履容一升七合，漆碗容一升二合. 欲知所失米数，计赃结断三盗各几何.

解决此问题，关键是要利用三箩所剩米数和三器的容量，依据大衍总数术分条列出，可归于解三元一次同余式方程组.

已知：

剩米(合)：$r_1=1$，$r_2=14$，$r_3=1$；

器容(合)：$a_1=19$，$a_2=17$，$a_3=12$.

求：每箩米 $N=r_i(\mathrm{mod}\ a_i)$.

依据术文，今以合为单位，不难看出，每箩米数满足同余式

$N\equiv1(\mathrm{mod}\ 19)\equiv14(\mathrm{mod}\ 17)\equiv1(\mathrm{mod}\ 12)$.

(1) 求定数 a_i，由于 19，17，12 互素，便为定数，这就省去了化约求定数的这一程序.

$a_1=19$，$a_2=17$，$a_3=12$.

(2) 求衍母：$M=\prod a_i=19\times17\times12=3\ 876$.

(3) 求衍数：$M_i=\dfrac{M}{a_i}$，$M_1=204$，$M_2=228$，$M_3=323$.

(4) 求奇数 g_i：满足 $M_i\equiv g_i(\mathrm{mod}\ a_i)$，于是 $g_1=14$，$g_2=7$，$g_3=11$.

(5) 求乘率 k_i：使得 $k_ig_i\equiv1(\mathrm{mod}\ a_i)$.

求 k_1 的程序：

$$\begin{bmatrix}1 & 14\\0 & 19\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 14\\1 & 5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 4\\1 & 5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 5\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}3 & 4\\4 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3 & 1\\4 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}15 & 1\\4 & 1\end{bmatrix}\to\text{停}.$$

所以乘率 $k_1=15$.

求 k_2 的程序：

$$\begin{bmatrix}1 & 7\\0 & 17\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 7\\0 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 7\\2 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}5 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}\to\text{停}.$$

所以 $k_2=5$.

求 k_3 的程序：

$$\begin{bmatrix}1 & 11\\0 & 12\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 11\\0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 11\\1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\to\text{停}.$$

所以 $k_3=11$.

(6) 求用数 $T_i=k_iM_i$ 所得 $T_1=15\times204$，

$$T_2=5\times228,T_3=11\times323.$$

(7) 求各总：$N_i=T_ir_i$.

(8) 求总数　$N^*=\sum N_i=1\times15\times204+14\times5\times228+1\times11\times323=23\ 066$.

(9) 求所得数　$N=N^*-pM=23\ 066(\mathrm{mod}\ 3\ 876)=3\ 193$.

故所求解为每箩筐米数 3 193 合，甲、乙盗米各为 3 192 合，丙盗米 3 179 合，共盗米9 563 合.